227	Fonctions de plusieurs variables: dvées partielles, différentiabilité, fonctions composées, fonctions de classe C^1, exemples.	Composition	Gourdon Monier 4, Sorosina.

Soient E=$\mathbb{R}^n$, F=$\mathbb{R}^p$. $L(E,F)=L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ désigne l'ensemble des applications linéaires (donc continues, car on est en dimension finie) de E dans F.
On se donne f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
On note $f_1,\dots,f_p$ les applications composantes de f, i.e.

$$f=\left|\begin{array}{l} f_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ \quad\vdots\\ f_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\end{array}\right.\text{,i.e } f(x)=\left(f_1(x),\dots,f_p(x)\right),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

et $B(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I. Différentiabilité en un point (Gou).

Def 1: Soit a∈U. On dit que f est **différentiable en a** ssi:
∃φ∈L(E,F) tq: $f(a+h)=f(a)+\varphi(h)+o(\|h\|)$ lorsque $h\to 0$.
Si φ existe, alors φ est unique et s'appelle **différentielle de f en a.** On la note df_a.

Def 2: Si f est différentiable en tt point de U, on dit que f est **différentiable sur U**, et l'application $df:U\to L_c(E,F)$ $a\mapsto df_a$ est appelée **application différentielle** de f . Si df est continue sur U, on dit que f est **C^1 sur U.**(1)

Exemple: $f:\mathbb{R}\to F$ est dérivable en a ssi elle est différentiable en a, et $df_a:h\mapsto f'(a)h$.

Exemple: Si f est linéaire continue, l'égalité f(a+h)=f(a)+f(h) montre que f est diffble sur E et que pour tout a∈E, df_a=f.

Prop 1: f **différentiable** en a ⇒ f **continue** en a. (2)

Prop 2: Soient $f,g:U\subset E\to F$ diffbles en a∈U. Alors:
> $f+g$ est différentiable en a, et $d(f+g)_a=df_a+dg_a$
> Pour tout λ∈ℝ, λf est diffble en a, et $d(\lambda f)_a=\lambda.df_a$
Donc l'ens. des app° diffbles en a est un ev.

Prop 3: Soient E, F, G des ℝ-evn, U⊂E, V⊂F deux ouverts, et deux applications $f:U\subset E\to F$, $g:V\subset F\to G$ vérifiant $f(U)\subset V$.
Si f est différentiable en a, et g différentiable en $f(a)$, alors $g\circ f:U\to G$ est différentiable en a et:
$d(g\circ f)_a=dg_{f(a)}\circ df_a$. (M4 p230).

Cor: Si f et g sont diff. en a, alors leur **produit** l'est aussi, et on a: $d(fg)_a=df_a.g+f.dg_a$ (3)

Application : (Sor ex.11.4.a, p.359) Dans (E, <.,.>) esp. eucl, où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire, $f:x\mapsto\|x\|$ est différentiable en tout point $x_0\neq 0$.
C'est la composée de $(x,x)\mapsto\langle x,x\rangle$ (bilinéaire donc différentiable) et de $x\mapsto\sqrt{x}$.

II. Dérivées partielles (Gou).

Valable seulement sur E=$\mathbb{R}^n$.

Def 3: dérivée suivant un vecteur. (M4 p.225)
Soient $a\in\mathbb{R}^n, v\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, Si $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ existe, alors on dit que f est dérivable en a suivant v. on note $D_vf(a)$ cette limite.

Prop 4: Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur v∈$\mathbb{R}^n$ en a, et $\forall v\in\mathbb{R}^n, D_vf(a)=Df(a)(v)$.
Attention, la réciproque est fausse!

Ctre-Exemple: (G p.305) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto\frac{y^2}{x}$ si $x\neq 0$, $f(0,y)=y$. est dérivable selon tout vecteur au point (0,0), mais n'est pas continue (donc pas différentiable) en (0,0).

Def 4: Si, pour $i\in[\![1,n]\!]$, f est dérivable en a selon e_i, on dit que f admet **une dérivée partielle en a d'indice i** et on note $Df_{e_i}(a)=\frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$.

Def 5: (M4 p.227) On appelle **$n^{ième}$ fonctions dérivées partielles** les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}:a\mapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
On identifie fonct° dvée partielle et dvée partielle en a.

Prop 5: (M4 p.236) Si f est différentiable en a, alors pour tout i, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et on a: $\forall(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$

$$df_a(h_1,\dots h_n)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$$

Il se peut que f admette des dérivées partielles premières en a sans que f soit différentiable en a. (M4p237)

Contre-exemple: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } xy\neq 0\\ 1\text{ si } xy=0\end{cases}$
admet des dvées partielles (nulles) en (0,0) et n'est pas diffble en (0,0), car elle n'y est pas continue.

Th 1: $f:U$ ouvert $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
Si toutes les dérivées partielles de f sur U **existent**, et si elles sont **continues en a**∈U, alors f est différentiable en a, et $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$.

La réciproque est fausse, on peut avoir existance des dérivées partielles, et f différentiable en a, sans que les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ soient continues en a.

Cor (SOR p362): f est de classe C^1 sur U ssi les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ **existent et sont continues** sur U.

Def 6: **dérivées partielles d'ordre supérieur.** Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p une fonction dérivée partielle d'ordre p par la relation: $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right)$

Th 2: Théorème de Schwarz. (pour n=2, p=1).
$f:U$ ouvert de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dvées partielles $\partial^2 f / \partial x \partial y$ et $\partial^2 f / \partial y \partial x$ sur U, **continues en a**∈U. Alors:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Cor: Si f est de classe C^p, alors les dérivées partielles d'ordre p **ne dépendent pas de l'ordre** de dérivation.

III. Matrice Jacobienne (Monier 4).

Def 7: (M4 p.229) Soit $f:U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable en a∈U et de fonctions composantes $(f_1,\ldots,f_p)$.

On appelle **matrice jacobienne de** f **en a**, et on note $J_f(a)$, la matrice de df_a relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Def 8: Avec les hypothèses et notations précédentes, si n=p on appelle (déterminant) **Jacobien de** f **en a** le déterminant de la mtrice Jacobienne de f en a. (4)

Prop 6: Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts, et deux applications $f:U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g:V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ vérifiant $f(U) \subset V$.
Si $f \in C^1(U)$, et $g \in C^1(V)$ alors $g \circ f \in C^1(U)$ et:
∀a∈U, $J_{g\circ f}(a) = J_g(a) \times J_f(a)$

<u>Application</u> (M4 p.232) :
$f:(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) \in \mathbb{R}^2$
$g:(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(u,v) \in \mathbb{R}$ supposées C^1 sur des ouverts convenable; alors on a par exemple pour M=(x,y,z): $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(M) =$
$\frac{\partial g}{\partial u}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_2}{\partial x}(M)$

<u>Exercice</u> (Gou p.303): Soient $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$\varphi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$
alors $F = f \circ \varphi$ (expression de f en coords polaires) est de classe C^2 et on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \quad (5)$$

IV. Notes.

N.B.: Les "Notes" sont des compléments que je garde "sous le coude" pour l'oral.

(1) A priori df_a dépend de la norme, mais comme en dim. finie elles sont toutes équivalentes, en fait l'existence de df_a n'en dépend pas.

(2) sert à démontrer la non-différentiabilité d'une fonction non continue.
(3) Se déduit de cequi précède, fg(x) est la composée de $x \mapsto (f(x), g(x))$ et de $(x,y) \mapsto xy$.

(4) Si le jacobien est positif au point **M**, l'orientation de l'espace est conservée au voisinage de ce point. À l'inverse, l'orientation est inversée si le jacobien est négatif. Si l'on considère un « petit » domaine, le volume de l'image de ce domaine par la fonction **F** sera celui du domaine de départ multiplié par la valeur absolue du jacobien. En mécanique des milieux continus (déformation des solides, écoulement des fluides), le tenseur des déformations pour les petites déformations (ou tenseur de Green) est la partie symétrique de la matrice jacobienne du vecteur-déplacement de chaque point du solide.

(5) Le **Laplacien** $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \ldots$ d'une fonction peut être interprété comme la courbure moyenne locale de la fonction, que l'on visualise aisément pour une fonction à une seule variable *f*(*x*). La dérivée seconde (ou courbure) représente ainsi la déviation locale de la moyenne par rapport à la valeur au point considéré.

<u>Autres opérateurs utilisant les dérivées partielles</u>:
∇ opérateur Nabla.

Gradient $\nabla_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)e_2 + \ldots$

En physique et en analyse vectorielle, on définit le gradient comme une grandeur vectorielle qui indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace.

Divergence $\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right);\ div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

En géométrie, la **divergence** d'un champ de vecteurs X mesure le défaut à ce que son flot préserve une forme volume Ω. il intervient en physique pour exprimer des lois de conservation ainsi que pour la formulation locale des lois physiques faisant intervenir un champ suivant une loi en carré inverse de la distance. L'opérateur divergence est notamment utilisé dans les équations de la mécanique des fluides ou les équations de Maxwell en électromagnétisme.

Rotationnel $\nabla \wedge A = \begin{pmatrix} \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{pmatrix}$

Le rotationnel exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point : sa circulation locale sur un petit lacet entourant ce point est non nulle quand son rotationnel ne l'est pas. Par exemple :

dans une tornade, le vent tourne autour de l'œil du cyclone et le champ vectoriel *vitesse du vent* a un rotationnel non nul autour de l'œil. Le rotationnel de ce champ de vitesse (autrement dit le champ de vorticité ou encore champ tourbillon) est d'autant plus intense que l'on est proche de l'œil.

le rotationnel du champ des vitesses V(r) d'un solide qui tourne à la vitesse angulaire Ω est dirigé selon l'axe de rotation et orienté de telle sorte que la rotation ait lieu, par rapport à lui, dans le sens direct et vaut simplement 2Ω.

Rot (Rot) = Grad(Div) – Laplacien.